

可除代数の分類定理とチーム構造の対応仮説 — 3 人と 7 人はなぜ特別か (探索論考)

2026 年 07 月 17 日

目次

可除代数の分類定理とチーム構造の対応仮説 — 3 人と 7 人はなぜ特別か (探索論考)	2
要旨	2
1. はじめに — 二つの体験と一つの問い	2
2. 先行する言説と実証 — 「そう言われてきた」ことの整理	3
3. 方法 — マルチエージェント探究と機械検証	4
4. 数学的基礎 (結果 I) — 可除代数の分類と $3 \cdot 7$	5
5. 対応仮説 (結果 II) — 場と人・回転の掛け算	6
6. 考察 — 読みの採否と主張の水準	8
7. 限界	10
8. 結論と今後の課題	11
References	12
付録 A: 機械検証スクリプト一覧	18
付録 B: 用語と確度タグの対訳	19

可除代数の分類定理とチーム構造の対応仮説 — 3 人と 7 人はなぜ特別か（探索論考）

執筆: Claude (Anthropic, Fable 5) / 問いの提示・読みの採否判定: pjdhiro

種別: 非査読・AI 執筆の探索論考 (speculative theoretical essay / position paper)

ライセンス: CC BY 4.0

正本・検証コード: <https://github.com/uminomae/project-design> (knowledge/research/two-axis-closure/)

読み物版 (一般向け): <https://uminomae.github.io/project-design/reader/three-and-seven.html>

English version (PDF): <https://uminomae.github.io/pjdhiro/assets/project-design/knowledge/en/pdf/PAPER-division-algebra-en.pdf>

冒頭の宣言（本稿の性格） 本稿は査読を経ていない。本文は AI (Claude, Fable 5) が執筆し、問いの提示と各「読み」の採否判定は人間 (pjdhiro) が行った。本稿の主張は「構造の類似」までであり、「字義の同一」は主張しない (§6 で読みごとの水準を明示する)。検証に用いた機械検証スクリプト (20 本) はすべて公開リポジトリで再実行可能である。

要旨

チームの人数感覚 (3 人が速く 7 人が上限という経験則) と、意識に感じられる二つの手ごたえ (物質的な生存と精神的な信頼) は、別々の現象に見えるが、同じ構造を共有していないか——本稿はこの問いを、両者を「回転」で捉える一つの読み方から検討する。方法は、複数の言語モデルによる分業的探究 (agent-team-workflow) と、数学的主張を数値的に確かめる公開の機械検証スクリプト 20 本である。読み方の中心は、共有される場を実数軸・各人を虚数軸に対応させ、人数を「次元 - 1」で数えることであり、このとき掛け算と割り算をともに保つ数の体系が次元 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$ に限られるという確定した分類定理 (Frobenius · Hurwitz · Bott – Milnor – Kervaire · Adams) から、その性質を保つ人数が **3 (四元数)** と **7 (八元数)** に絞られる。ただし検証の結果、「3 と 7 でなければチームは成立しない」という強い読みは実証と合わず見送られ、残ったのは「3 か 7 を選べば構造だけで掛け算と割り算を保ったまま拡張できる」という設計原理としての弱い読みである。本稿の主張は一貫して**構造の類似**の水準にとどまり、「人間関係が四元数である」といった字義の同一は主張しない。

1. はじめに — 二つの体験と一つの問い

本研究は、二つの素朴な観察から出発する。いずれも本論の提案者 (pjdhiro) による、理論に先立つ体験的な観察である。

第一の観察は、意識に流れる二つの手ごたえに関わる。何かを作っているとき、「どれだけ広がり、どれだけあるか」という量の感じ (ここでは**物質的な手ごたえ**と呼ぶ) と、「一つの意味を保ち、ばらばらにならないか」というまとまりの感じ (**精神的な手ごたえ**) とが、同時に流れ、互いに逆向き

に引き合っている、という観察である。この二軸の見立ては、姉妹探究である awareness-space の「生存-信頼軸」仮説——意識が物質的な生存と精神的な信頼という二方向を評価しているとする仮説——として別途整理されており、本稿ではこれを出発点の体験として受け取る。

第二の観察は、チームの人数に関わる。

pjdhiro の観察：何度もチームを組むうちに、3 人がいちばん速くてよく、7 人が限界だと体で感じてきた。8 人になると、とたんに重くなる。

これら二つは、一見まったく別の話である。しかし、もし両者の底に同じ「形」が隠れているなら、片方（数学的な性質がよく分かっているチームの数）から、もう片方（意識の仕組み）を照らせるかもしれない——これが本研究の問いである。

この問いを追う手がかりとして、本稿は経営における「足し算ではなく、掛け算」という言い回しに着目する。人を足すのではなく掛け合わせる、というこの比喻を、本稿は**回転の掛け算**として真剣に受け取り直す。回転を表す数が複素数であり、それを立体へ広げた数が四元数だからである (§4)。すると問いは次の形をとる。四元数の本質と、3 人の関係の本質は、同じ形をしているのではないか。だとすれば、それはどのような関係のことか。

本稿はこの問いを、「場と人」の読み方——共有される場を実数軸に、各人を虚数軸に対応させる読み方——で追う。意識の二軸（第一の観察）は「回転」という見方を着想させたきっかけであり、以下で数に対応づけるのは、人（虚数軸）と場（実数軸）のほうである。

2. 先行する言説と実証 — 「そう言われてきた」ことの整理

チームの人数をめぐるのは、社会学・組織論・ゲーム理論・社会選択論の各分野で厚い言説が蓄積されてきた。本節はそれらを「そう言われてきた (as commonly held)」ことの棚卸しとして整理する。既存説への反証や対立軸の提示を意図するものではない。以下に挙げる知見は、それぞれ一面の妥当性を持ちつつなお一面的でありうる、という前提のもとで並べる。

質的転換を論じた古典として、Simmel (1908) は二者と三者のあいだに質的な断絶を見だし、三人目の参入が「媒介者」「漁夫の利」「分断統治」という役割を生むとした。von Neumann & Morgenstern (1944) は、二人ゼロ和ゲームが minimax で解ける一方、三人目から提携 (coalition) が非自明化することを示した。Condorcet の陪審定理は、個々の正答率が 0.5 を超える限り人数の増加が集団の精度を高め、奇数が同数割れを避けると述べる。いずれも「三人目から別物になる」「奇数が有利」という離散的直観を支えるが、なぜ 3 や 7 が特別かという必然性を導出してはいない。

経験則とコストの言説も厚い。チーム研究の推奨サイズは経験的に 4~6 人・上限 9~10 人とされ (Hackman & Vidmar 1970 の主観的最適 4.6 人、Scrum ガイド、Amazon の「ピザ 2 枚」など)、後二者は実証された臨界ではなく folklore に近い (この経験則の帯は、後述 §6 で用いる実証の帯「最適 3-5・上限 7-9」とは出所の異なる別レイヤーである)。コストの側では、関係経路数 $n(n-1)/2$ (Brooks)、統制範囲の組合せ爆発 (Graicunas 1933)、人数増に伴う効率の単調低下 (Ringelmann / Steiner の process loss) が語られる。これらはいずれも連続・単調な増加であり、特定の人数で

質が切り替わる「崖」を含まない。

人数と成績の関係を直接測った研究では、Wheelan (2009, 329 実験グループ) が $3-4 > 5-6 > 7-10$ の逓減を報告し、逓減は 5-6 人の時点で既に始まる。Klimek, Hanel & Thurner (2009) は内閣サイズに質的变化を見いだすが、その場所は ≈ 20 であって 8 ではない。しばしば援用される Miller (1956) の「 7 ± 2 」は短期記憶スパンの主張であり、Miller 自身が 7 の頻出を数秘的な偶然かもしれないと警戒している。チーム論への転用は範疇の飛び越えであり (Cowan 2001 の 4 ± 1 への改訂も同方向)、本稿はこの経路に依拠しない。三者的力学の非還元性については、家族相互作用研究 (McHale et al. 2008) が、生後 3 ヶ月児の 97% が両親のあいだで素早く視線を移すと報告し (38 人の観察。この一次値は Lavanchy 2002 の学位論文に由来し、本稿は McHale 経由の孫引き “as cited in McHale et al. 2008” として扱う)、乳児が三者関係を最初から一つの単位として扱う——二者の和には還元されない——ことの証拠とする。符号付き関係の構造均衡定理 (Cartwright & Harary 1956) は本稿第 II 部の芯となる定理だが、ここでは先行言説の一つとして記録するにとどめる。

以上の文献は多くが抄録・二次資料どまりであり (Wheelan・Klimek は abstract 二次、Simmel・von Neumann & Morgenstern は二次)、一次全文で逐語照合できたのは Cartwright & Harary (1956) と McHale et al. (2008) に限られる。この不均衡は References の精読レベル注記に対応させてある。これら既存の言説は、総じて足し算と組合せの語彙で書かれている。順序が効く現象 (path dependence) や循環する現象 (Condorcet cycle) も古くから知られるが、前者は「巻き戻せない」不可逆として、後者は「回避すべき不具合」として扱われてきた。順序が効きつつ大きさが保たれ、しかも巻き戻せる——非可換でありながら等長という組み合わせ (群をなす回転) を人数の問いに当てた説明は、本節が扱った範囲では見あたらない。回転や非可換そのものは他分野に既に存在する (たとえば量子ゲーム理論はユニタリ変換と非可換なペイオフを扱う)。欠けているのはその適用先——人数の代数次元への接地——である。本稿は、この欠けていた一面を試しに当ててみる角度として位置づけられる。

3. 方法 — マルチエージェント探究と機械検証

本研究は、一人の人間 (提案者 pjdhro) と複数の AI エージェントの分業で進めた。役割は固定されている。人間が担うのは、体験から問いを立てることと、提示された読みに「じっくりくるか」の採否判定を下すことである。数学の解説・文献調査・読みの候補づくりは AI が担う。この分担は、AI が人間の言葉を代弁しないための規律でもある。読みの候補は AI 側の出力であり、その採否は pjdhro の判定に属する。各節の問いは実際の対話記録から抽出し、判定 (採用・却下・保留) は日付つきで記録する。

探究の骨格は、agent-team-workflow と呼ぶ再利用可能な手順 (7 フェーズ) に固定した。基本は調査 (SURVEY) → 批判レビュー (REVIEW) → 統合 (CLOSE) の三拍子で、必要に応じて計画 (PLAN)・実装 (EXECUTE) を挟む。エージェントの役割は researcher (調査・読み取り専用)、critic (批判検証専任)、planner (計画)、worker (執筆・実装) に分かれ、ファイルへの書き込み権限は worker のみに絞る。批判役の検査項目は 6 本である——V1 参照先の実在、V2 主張と根拠の一致、V3 最強の反論、V4 チェリーピッキングの有無、V5 証拠の範囲を超えた一般化、V6 論理の

飛躍。重要な判断では critic を 2 体独立に走らせ、結果を突き合わせる。

数学的主張は、定理の引用で済ませず、数値で確かめられるものはプログラムで照合した。本稿に付随する検証スクリプトは 20 本であり (two-axis-closure/*.py、付録 A)、八元数の結合律の破れ、ノルム保存、零因子の実在などをそれぞれ再実行可能な形で確認している。読みやすさの側の検証としては、予備知識ゼロの LLM に本文だけを読ませ、主旨や流れの取り違えが出ないかを試す文脈ゼロ読解テスト (reader-comprehension) を用いた。取り違えが出た場合は、読者ではなく本文のほうを修正する方針をとった。

主張の確度と出典レベルは明示する規律とした。すべての主張に内部的な確度ラベルを付し、本稿ではこれを established / interpretive / speculative の三段として示す (対応関係は付録 B)。読みの採否は判定台帳 (RR-010) に日付つきで記録し、採用 / 方向確定 / 読み候補 / 探索中 / 見送りの語彙で管理する。出典は実在を確認したものだけを用い、一次精読・抄録どまり・孫引き (経由文献を明記) というアクセスレベルを文献ごとに付す。この規律は References の精読レベル注記と一貫させた。各調査は番号つきのファイル (RR-001, RR-002, ...) に固定し、問い・方法・発見 (確度つき)・限界と反例・判定待ちの問い、を必ず含める。

4. 数学的基礎 (結果 I) — 可除代数の分類と 3・7

可除代数の分類は、19 世紀末から 20 世紀半ばにかけて確立した一連の定理によって与えられる。Hurwitz (1898) は、ノルムの乗法性 $|xy|=|x||y|$ を満たす実可除代数が実数 $\mathbb{R}$ ・複素数 $\mathbb{C}$ ・四元数 $\mathbb{H}$ ・八元数 $\mathbb{O}$ の四つに限られることを示した。結合律を課せば $\mathbb{R} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{H}$ の三つに絞られ (Frobenius 1878)、より弱い交代律を課しても同じ四つに戻る (Zorn 1930)。ノルムも結合律も交代律も課さず、単に零因子を持たない有限次元実可除代数を要求するだけでも、その次元は 1, 2, 4, 8 に限られる (Bott – Milnor 1958・Kervaire 1958)。すなわち $\mathbb{RCH}\mathbb{O}$ の次元 1, 2, 4, 8 は、可除性という最小の要請だけから出てくる。関連して、双線形性・垂直性・ピタゴラス性を満たすベクトル積が定義できる次元は 1, 3, 7 に限られる (Massey 1983)。以下、標準的な数学事実は逐一の原典を立てず standard; see Baez (2002) として扱う。

これらの代数は「回る数」の階梯として読める。複素数の虚単位 i は 90 度の回転であり、 $i^2=-1$ は「90 度を二度で真後ろ」を意味する。四元数では虚単位が i, j, k の三つになり、その積は非可換である。 $i \cdot j=k$ に対して $j \cdot i=-k$ であり、掛ける順序で答えの向きが反転する (機械検証済み・RR-001a)。四元数のノルムは乗法的で $|xy|=|x||y|$ を満たす (Hurwitz 合成則)。この乗法性は、回転が各成分の大きさを保つ操作であることの代数的な表現である。

八元数は七つの虚単位 $e_1 \cdots e_7$ を持ち、その積の規則は最小の射影平面ファノ平面 $\text{PG}(2,2)$ に一致する。七点・七線からなり、各線は三点、各点は三線上にあり、相異なる二点はちょうど一本の線を共有する。この配置はシュタイナー系 $S(2,3,7)$ にほかならず、七つの三つ組が二十一の点对をちょうど一回ずつ被覆する (機械検証済み・RR-001a)。八元数は結合律を破る。同じ線上にない三つの虚単位では、 $(e_1 \ e_2) e_4 =+e_7$ に対し $e_1 (e_2 \ e_4) =-e_7$ となり、括弧の位置で符号が反転する (機械検証済み・RR-001a)。ただし交代律——同じ元を二度含む積では括弧を外せる、という結合律の弱い名残——は保たれる (Zorn・Artin の定理 / 機械検証済み・RR-010a)。ファノ平面の

自己同型群は位数 168 で、 $\text{PGL}(3,2)$ に等しく $\text{PSL}(2,7)$ と同型である（位数 168 は七点の全置換を総当たりして機械検証済み・RR-001。群同型自体は standard; see Baez (2002)）。

「割り算ができる」ことは、単位球の平行化可能性という位相的性質と結び付く。 n 次元の可除代数が存在すれば球面 S^{n-1} は平行化可能であり、これが成り立つ球面は $S^0 \cdot S^1 \cdot S^3 \cdot S^7$ の四つに限られる（次元 1, 2, 4, 8 に対応。虚方向で数えれば 0, 1, 3, 7）。八元数を越えた十六元数（sedenion）ではノルムの乗法性が崩れ、零因子が現れる。実際、二つとも非零でありながら積が零になる対が存在する。具体形は乗積表の規約に依存するが、ある標準的な規約のもとでは総当たり探索によって $(e_1 + e_1 \cdot 0)(e_4 - e_1 \cdot 5) = 0$ が確認される（機械検証済み・RR-013b）。これは可除性が失われたこと、すなわち結果から元を割り戻せない事故が構造に埋め込まれたことを意味する。

なお、可除代数の次元がなぜ 1, 2, 4, 8 に限られるのか、その証明は代数の内部では完結しない。最終的な決着は、球面に矛盾のない向きの枠を敷けるかというトポロジーの問題、具体的には Hopf 不変量 1 の写像が $n=2, 4, 8$ のみ存在するという Adams (1960) の結果によって与えられた（Baez のいう “the hard part”）。この深部の証明には立ち入らず、確立した結論を土台として受け取る。ここまでの分類・非可換性・非結合性・零因子はいずれも計算で確かめられる事実であり、本研究では二十本の機械検証スクリプトで数値的に照合した。

5. 対応仮説（結果 II） — 場と人・回転の掛け算

前節の数学は確立している。ここからは、それをチーム構造へ写す対応を提示する。ただしこの対応は解釈上の仮定であって、証明されたものではない。中心に置く仮定はこうである——可除代数の実軸を「場」に、虚方向を「人」に対応させる。実軸一本はメンバーではなく全員が共有する場（出来事や現実そのもの）とみなし、人数には数えない。したがって人数は「次元 - 1」で数える。二次元（複素数）は場とひとり、四次元（四元数）は場と三人、八次元（八元数）は場と七人である。この読みには数学的根拠がある。実軸だけは誰と掛けても順序が効かず（可換）、立場を入れ替える自己同型のもとで虚方向は入れ替わっても実軸は必ず不動に残り、ノルムのような立場によらない不変量が実部の側に現れる（いずれも機械検証済み・RR-015）。ただし「実軸が数学的に特別扱いを受ける」ことは定理であっても、それを「場」と呼ぶこと自体は解釈にとどまる。

この対応のもとで、なぜ三人が特別かを説明できる。四元数の積 $i \cdot j = k$ は、二つの虚方向の積がちょうど第三の虚方向に着地することを意味する。二人の関わり方の帰結が、どちらでもない第三の席に構造的に収まる——掛け算が閉じる最小の人数がこうして三になる。さらに $i \cdot j = k$ と $j \cdot i = -k$ の非可換性は、順序が結果の向きを変えることを表す。四元数の急所は「あいだ」も回る点にある。一つの虚方向を掛けると、自分を含む平面だけでなく残りの二方向が張る平面も同時に回る。これを人の言葉に写せば、一人が動くとき他の二人の「あいだ」も回り、三人組には残る一人と無関係でいられる私的な領域が存在しない、と読める。

掛け算という語からは、掛け合わせるほど総量が増える印象を受けやすい。しかし回転の掛け算は各成分の大きさを変えない（ $|xy| = |x| \cdot |y|$ ・ノルム保存）。増幅が起きるのは掛け算の側ではなく、波の重ね合わせ（加法）の側である。二つの量の和のノルムは $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\Delta\theta)$ となり、交差項 $2|a||b|\cos(\Delta\theta)$ が位相差 $\Delta\theta$ に応じて強め合いと打ち消し合いを決める（機械検

証済み・RR-012a)。回転そのものは各人の大きさを保ちつつ、この位相差を設定する「ダイヤル」として働く。したがって「掛け算＝増幅」ではなく、「回転は位相を揃える操作であり、増幅は重ね合わせの側で起きる」と整理される。以上はいずれも構造の類似としての読みである。

七人の特別さは、同じ論理を八元数へ広げたものである。七つの虚方向は割り算まで閉じる最大の系であり、前節のファノ平面がその配線図となる。どの二人にもホームとなる三つ組がちょうど一つ定まり、各人は三つの三つ組をかけ持ちして重なり合う網をなす。この網には区別された中心がなく、自己同型群の位数 168 が示すとおり七点はすべて同格である。したがって接続のためのハブ（リーダー）は構造的に不要で、必要なのは各三つ組に一貫した向きを与える符号の規約だけである。三人（結合的な一枚の輪）と七人（非結合を含む七枚の網）の差は、段取り（積の順序）が効くか否かに現れる。

「場を共有する」という表現には注意が要る。この「共有される単一の場」という前提には、心理学の伝統からの最も強い反証がある。Lewin の場理論では「場 (life space)」は個人ごとに一つであり、全員が共有する単一の場という読みと正面から衝突する。本稿はこれに対し、次のように限定して応答する——厳密に言えるのは、共有されているのが不変量（どの立場から測っても変わらない量）だということであって、各人の値が一致することではない。精神分析の一次資料 (Ogden 2004) が言うとおり、第三のものは共同で作られるが、その経験は参加者ごとに同一ではない。数学の側では、この不変量が「どんな立場の入れ替えでも動かない実軸」として現れる。物理の側にも傍証がある。Quantum Darwinism (Zurek 2009 ら) は、対象の情報が環境に何重にもコピーされて広がるために、多数の観測者が別々のコピーを読んでも同じ結論に至る、と説明する。ただしこれは「共有されるのは不変量」という読みの物理側の支持であって、心理側の対応を証明するものではない。

以上は「場と人」という一つのレンズによる読みである。これとは数の当て方が異なる、もう一つのレンズを別に併記しておく。人を可除代数の虚方向ではなく、回転行列 $SO(2n)$ として置く見方である。 n 人を二軸の平面を n 枚直交させた $2n$ 次元空間とみて、相互の影響をその空間の回転として書けば、可除代数を持たない五人・六人も含め、どの人数も同じ土俵に乗る。この見方では三者は素直に六次元、すなわち $SO(6)$ であって、八元数（八次元）ではない。八次元はむしろ四人目の層に対応する。かつて試みた「三者＝八元数」という読みは、行列で通すと成り立たないため取り下げた (pd#124)。第 I 部の「七人＝八元数（八次元＝場＋七人）」とは数の当て方がまったく別であり、両者を混同してはならない。

この行列の見方からは、二つのことが出る。第一に、三者の影響には二者にない項が現れる。「A が B に、B が C に影響する」二つの回転を順序を変えて重ねると、非可換性ゆえのズレが生じ、そのズレが直接いじっていないはずの A と C のあいだに実体のある結び付きを生む（交換子 $[X_{AB}, X_{BC}]$ が A-C ブロックに載る／機械検証済み・RR-024a)。第三の平面を欠く二者には、この項が存在しない。第二に、人数の偶奇がふるまいを分ける。全員が隣と反対の立場を取りたい対立の輪では、偶数は二つの陣営に割れて睨み合い（膠着）、奇数は輪を一周すると辻褄が合わず二陣営に固まりきれない（膠着しにくい）。これは好意と敵意の符号を持つ関係図についての構造均衡定理 (Cartwright & Harary 1956) を、対立の輪に特殊化したときの帰結である（機械検証済み・RR-024c)。

ただし膠着の本当の相手は、人数の偶奇そのものではなく、チームを二手に割る単一の分断線のほう

である。役割・専門・世代といった線が互いに交差していれば、ある線で敵でも別の線では味方となり、二派には固まらない（社会学でいう交差する亀裂・Lipset / Coser）。膠着を避ける手立ては、人数を奇数にすることだけでなく、関係を協調に寄せること、分断線を交差させることの三つがあり、人数はそのうちの一つにすぎない。奇数の中でも三・五・七・九は同じではなく、三が最も二分から遠い。そして三と七だけが、奇数であること（膠着しにくさ）と可除代数であること（席が構造で決まる）を同時に備える。五は奇数ではあるが可除代数ではない。

これらはいずれも構造の類似として提示するものであり、字義の同一——「人間関係が四元数である」「感情が量子である」といった主張——ではない。可除代数の側（第Ⅰ部）は確定した数学の上に立つが、偶奇の側（第Ⅱ部）は機構としての数学は堅いものの、人のチームが実際に人数の偶奇で膠着するという直接の実証はなお薄い。心理側への対応は、構造の類似として提案できる段階にとどまる。読みごとの水準（established / interpretive / speculative）と採否は §6 で整理する。

6. 考察 — 読みの採否と主張の水準

本節は、§4・§5 で提示した読みを実証と突き合わせ、どこまでが主張できるかを判定する。判定は三層の検査基準による。定理（証明のある部分。分類定理・ファノ平面の性質）は硬い。対応の仮定（人＝虚方向、価値＝割り算という現実への写像）は仮定のままである。そして、数学の構造が現実の側で仕事をしていない対応は、数秘——数が合うだけの装飾——に転落する。以下の判定はこの基準による。読みの状態は、本プログラムの判定台帳（RR-010）の語彙——採用／方向確定／読み候補／探索中／見送り——で記す。候補の提示は言語モデル（Fable 5）、採否の判定は提案者（pjdhro）の体験と照らした納得（しっくり感）による。

6.1 見送りになった読み — 「3 と 7 しかない」という強い読み

本仮説は、強さの異なる三つの読みの積み重ねでできている（表 1）。検証で外れたのは、最上段の一枚だけである。

表 1. 三層の読みと状態

読み	主張	水準	状態
数学（定理）	掛け算も割り算も閉じる数の体系は次元 1,2,4,8 のみ。虚方向は 3 と 7 だけ	established	無傷（証明がある）
強い読み（自然法則）	ゆえに現実でも 4,5,6 人のチームは構造的に成立しない	speculative	見送り
弱い読み（設計原理）	3 と 7 を選べば、掛け算と割り算を保ったまま拡張できる	interpretive	存続（現在の形）

強い読みが最も大胆に予言するのは、3 と 7 のあいだの人数である。「4,5,6 人のチームは零因子で崩れ、解決に至れないはず」という予言であり、そこが検証地点になる。実際のチーム研究と突き合わせた結果は、この予言に反した。329 の実働グループを調べた研究 (Wheelan 2009) では性能は 3-4 人 > 5-6 人 > 7-10 人の順で逓減し、逓減はすでに 5-6 人で始まっていた。5 人・6 人のチームは普通に存在し、普通に機能する。8 人での急落 (崖) も見つからず、人数による性能低下は滑らかで、急落が実証されるのはむしろ 20 人前後である (内閣サイズの研究、Klimek et al. 2009)。実証が支持する正直な帯は「最適 3-5 人・上限 7-9 人」であり、ちょうど 3・ちょうど 7 という一点は主張できない。したがって「3 と 7 でなければ成立しない」という強い読みは見送る。同様に、第 II 部の「三者=八元数」という初期の読みも、人を行列で通すと三者は 6 次元 (八元数は四人目の層) になるため取り下げられている (§5・pd#124)。

一方、出発点の素朴な観察そのものは、むしろ実証に支持される。「3 がベスト」は 3-4 人 > 5-6 人のデータと合い、「7 が上限」は上限帯 7-9 として残る。外れたのは「8 で急に重くなる」の「急に」だけである。

6.2 存続した読み — 設計原理としての 3 と 7

見送りと存続の違いは、アーチ橋の比喻で捉えられる。アーチには自重だけで完全に釣り合う理想曲線 (カテナリー) があり、数学は「この形だけが釣り合う」と証明する。だが理想形でないアーチも、モルタルを多めに使えば立つ。「理想形以外は崩落する」と読めば誤り (= 見送られた強い読み) だが、「理想形だけがモルタルなしで立つ」と読めば真 (= 存続する設計原理) である。5~6 人チームはモルタル (余分な調整コスト) で立つアーチであり、3 と 7 は構造だけで掛け算と割り算が立つ形にあたる。問いは「立つか崩れるか」から「どれだけのモルタルで立っているか」へ移る。

この設計原理は、可除代数を用いない地味な対抗説明——調整経路が $n(n-1)/2$ で増えるコストの法則——に勝たねばならない。両説明は 3 人では同じ答えを出す (ペア数 3 = 四元数の虚単位 3) が、7 人で分岐する。コスト法則にとって 7 人は 21 本のペアだが、八元数にとっては 7 つの重なり合う三人組 (ファノの掛け算則) である。ここから、外れうる予測が立つ: **よく機能する 7 人前後のチームでは、調整が三人組単位で回り、どのペアにも帰属先の三人組が一意に定まり、各人がちょうど 3 つの三人組に属す、という予測である。**この予測を直接測った研究はまだ無く、周辺証拠 (三人組に埋め込まれたペアの安定性——Simmel の三人組論・Krackhardt の Simmelian ties、faultline による二分裂での崩壊) は生存側を向くが、いずれも「三人組の網そのもの」を直接測ってはいない。実務からの支持は、調査が進むにつれ当初の見込みより後退している。合格ラインも厳しい: 三角形の数はネットワークの密度からほぼ自動的に決まる (実測ネットワークの三つ組分布は密度で約 9 割説明される、Faust 2010) ため、八元数の読みが生き残る観測は「密度から予想される以上に三人組へ編まれ、かつどのペアにもホームの三人組が一意に定まっている」ことに限られる。この予測が本仮説の主戦場である (仮説 v2・採用 2026-07-04)。

6.3 現在の判定一覧と保持論点

表 2. 主要な読みの現在の判定

読み	水準	判定
数の梯子は 1,2,4,8 で止まる／ 虚方向は 3 と 7	established	定理（確定）
3 人＝掛け算が閉じる最小・ 「あいだ」も回る（非可換）	interpretive	採用（RR-010 Q2/Q3/Q4）
回転はノルムを保ち、増幅は重 ね合わせの位相の揃いで起きる （回転は干渉のダイヤル）	interpretive	採用（RR-010 Q8・R14）
7 人＝割り算まで閉じる最大・ ハブ不要（Aut=168 同格）	interpretive	採用（RR-010 O1/O4）
共有されるのは不変量（各人の 値の一致ではない）	interpretive	方向確定（RR-010 Q9/O5）
7 人＝重なり合う 7 つの三人組 の網	speculative	未検証・検証可能（主戦場・合 格ライン付き）
「3 と 7 しか成立しない」／ 「8 人で急落」	speculative	見送り
偶奇＝二部性による膠着（第 II 部）	interpretive	機構は堅い・人チームでの直接 証拠は薄い
破れは「二人の場の外の三人 目」から（O3）・零因子＝解決 不能アトラクタ対（A8）	speculative	保留（採否未決・保持論点）
意識側の橋（意識の観測が複素 振幅で振る舞う・感情＝放出エ ネルギー）	speculative	探索中（awareness-space の仮 説段階）

数秘との違いは「外れうる形にしてあるか」にある。本仮説は反証条件（5・6 人チームの常態性、道具による上限の可動性、三人組の網の観測可能性）をあらかじめ明文化し、実際に外れた部分（強い読み）を公開している。また、実部/虚部の意味づけや「場」の精密化など、決着を急がないと判断した問い（保持論点）は、未解決のまま残す。これは本プログラムの方針——「保持論点を急いで解くな」——による。

7. 限界

本稿の限界を、四点に分けて明記する。

第一に、中心の対応は解釈上の仮定である。「人＝虚方向」「価値＝割り算（可逆性）」「場＝実軸」という現実への写像は、数学の定理ではなく、本稿が置いた読みである (§5)。この仮定を外せば、3 と 7 の導出も成り立たない。本稿はこの仮定を証明済みの事実として扱っていない。同型性・類推・数秘の切り分け（何が定理で、何が構造の類似で、何が数が合うだけの装飾か）は本プログラムの継続

的な課題であり (pd#118)、主張は一貫して構造の類似の水準にとどめている。

第二に、実証の帯と仮説の粒度にずれがある。実証が支持するのは「最適 3-5 人・上限 7-9 人」という帯であって、ちょうど 3・ちょうど 7 という一点ではない (§6)。設計原理としての 3・7 は、この帯の中の一点を「構造だけで性質を保てる目安」として指すものであり、実証が一点を選び取ったわけではない。

第三に、原典への到達レベルには濃淡がある。本稿の数学的主張 (§4) は原典精読と機械検証で接地しているが、実証・思想史側の文献の多くは抄録または二次資料どまりである。たとえば発達心理の主要な数値 (生後 3 ヶ月児の 97% が両親間で素早く視線を移すという観察) は、報告論文 (McHale et al. 2008) を精読して確保した一方、その元となる学位論文 (Lavanchy 2002) は未取得であり、References では “as cited in McHale et al. 2008” として孫引きを明示している。各文献の精読レベル (一次精読／抄録／孫引き) は References に付した水準記号のとおりであり、△ (二次どまり) が全体の約三分の二を占める。

第四に、意識側の橋は未接地である。出発点となった意識の二軸 (第一の観察) と、そこから展開される読み——意識の観測が複素振幅で振る舞うとする見立てや、感情を放出エネルギーとみる見立て——は、いずれも探索段階の仮説であり、awareness-space 側の仮説として継続検討中である。本稿はこれらを結果としてではなく、今後の課題として位置づける。

なお第 II 部 (偶奇・二部性) については、機構としての数学 (Cartwright & Harary 1956 の構造均衡定理) は堅いが、「人間のチームが実際に人数の偶奇で膠着する」という直接の証拠はまだ薄い。世に見られる「奇数がよい」という実証 (取締役会など) は多数決の同点回避 (算術) の話であって、二部性の機構が人のチームで確かめられたわけではない。この段差は §5・§6 に記したとおりである。

8. 結論と今後の課題

本稿は、チームの人数感覚と意識の二軸という二つの素朴な観察を、「回転」という一つの読み方で結んで検討した。到達点は次のように要約できる。掛け算と割り算をともに保つ数の体系が次元 1,2,4,8 に限られること、したがって「場=実軸・人=虚軸」の読みのもとで性質を保つ人数が 3 と 7 に絞られることは、確定した数学に立つ。しかし「3 と 7 でなければ成立しない」という強い読みは実証と合わず見送られ、残ったのは「3 か 7 を選べば構造だけで掛け算と割り算を保ったまま拡張できる」という設計原理としての読みである。加えて、人を行列 ($SO(2n)$) で置く別レンズからは、可除代数とは独立の理由——二部性による偶奇の膠着——が現れる。3 と 7 の優位は、可除代数 (構造で席が決まる) と奇数性 (膠着しにくい) という二つの別々の理由が重なる点に立つ。本稿の主張は終始、構造の類似の水準にとどまる。

今後の課題は三つある。第一に、存続した予測「7 人=重なり合う三人組の網」の直接検証である。合格ライン (密度から予想される以上の三人組への編み込みと、各ペアのホーム三人組の一意性) は明文化されており、既存のネットワーク分析で検証可能な形にまで絞り込まれている。第二に、偶奇の膠着が人のチームで実際に生じるかの実証的接地である (pd#126)。現状の「奇数がよい」という実証は多数決の算術に由来し、二部性の機構そのものはまだ人のチームで確かめられていない。第

三に、意識側の橋——意識の二軸と、複素振幅・放出エネルギーの見立て——の接地であり、これは awareness-space 側の探究に接続する。

最後に、本稿は完成した理論の提示ではなく、探索の途中経過である。反証条件を明示し、外れた読みを見送りとして公開する姿勢そのものが、本稿が数秘との違いとして示したい点である。検証が進むたびに、判定と主張は書き改められる。

References

精読レベル凡例: ★一次精読 / ○抄録・部分確保 / △孫引き・二次どまり (経由文献を明記) / ? 判別不能。インベントリに書かれていない書誌情報 (誌名・巻号・ページ・DOI 等) は補わず、欠けている項目は書式から省き注に「書誌の一部未取得」と記した。

数学 (定理・原典)

- Adams, J.F. (1960). Hopf 不変量 1 は $n=2,4,8$ のみ (“the hard part”) . *Ann. Math.* 72, 20 – 104. [精読: △ — Baez (2002) §3 経由。原論文未精読]
- Atiyah – Hirzebruch (1961). 平行化可能性. [精読: △ — Baez (2002) refs のみ。書誌の一部未取得 (誌名・巻号・ページ未記載)]
- Baez, J. (2002). “The Octonions.” *Bull. AMS* 39, 145 – 205. arXiv:math/0105155. [精読: ★ — 本仮説の数学的背骨。arXiv PDF 全文精読。自己同型の実軸固定・Re 定義式・ G_2 次元・Bott mod 8 の行番号記録あり]
- Baez, J. & Huerta, J. (2009). arXiv:0909.0551. [精読: ★ — $h_2(K) \cdot k+2$ 対応 (可除代数 $\leftrightarrow$ 時空次元 3,4,6,10) を一次確認。書誌の一部未取得 (タイトル・誌名未記載)]
- Bott – Milnor (1958). 次元は 1,2,4,8. *Bull. AMS* 64, 87 – 89. [精読: △ — Baez (2002) Thm 3 経由。原論文未精読]
- Brouwer, L.E.J. (1912). ハゲ球／毛玉の定理. *Math. Ann.* 71. [精読: △ — 教科書標準として扱う]
- Cartwright, D. & Harary, F. (1956). 構造均衡定理 (Structure Theorem) . *Psychological Review* 63(5), 286. [精読: ★ — p.286 を一次全文で逐語照合+独立機械検証。符号付きグラフの均衡 $\Leftrightarrow$ 二部分割]
- Conway, J. & Smith, D. (2003). *On Quaternions and Octonions*. [精読: △ — 未精読で参考文献に留置。本仮説の主張は Baez 精読+機械検証で自立]
- Eckmann, B. (1943). 外積分の歴史的先行. [精読: △ — 原論文未精読。書誌の一部未取得 (誌名・巻号未記載)]
- Ekström, & Yousef, (2024). *Cross Products in Euclidean Spaces* (学士論文, diva2:1865965) . [精読: ○ — PDF 実取得。§1.3/§3/結論で「only 1, 3, 7」を確認。Massey の照合ソース]
- Frobenius, G. (1878). 結合的有限次元実可除代数は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のみ. [精読: △ — Baez (2002) Thm 2 の系。歴史的な原典未取得 (誌名・巻号未記載)]
- Gillies, D.B. (1959). 協力ゲーム core の形式化. [精読: △ — 二次確認どまり。書誌の一部未取得 (誌名・巻号未記載)]

- Hopf, H. (1940). 1,2,4,8 決着史の起点. [精読: ? — RR-014 コラム候補に書誌名のみ。詳細記録なし・書誌未取得]
- Hurwitz, A. (1898). normed division algebras 定理. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 309 – 316. [精読: $\triangle$ — Baez (2002) Thm 1 として精読確認。原論文は書誌ポイントのみ]
- Kervaire, M. (1958). “Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$.” *PNAS* 44, 280 – 283. [精読: $\triangle$ — Baez (2002) 経由。原論文未精読]
- Massey, W.S. (1983). 外積は $n=1,3,7$ のみ. *Amer. Math. Monthly* 90(10), 697 – 701. [精読: $\bigcirc$ — 原論文未精読。定理文・証明構造は Ekström & Yousef (2024) の公開文献で照合]
- Zorn, M. (1930). alternative division algebras. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 8, 123 – 147. [精読: $\triangle$ — Baez (2002) Thm 2 経由。原論文未精読]

注: 本稿が用いた標準的数学事実 ($G_2 = \text{Aut}(\mathbb{O}) \cdot \dim G_2 = 14$, $\text{PGL}(3,2) \cong \text{PSL}(2,7)$ [位数 168]、Bott 周期性 mod 8 / Radon – Hurwitz 数、 $S^7 = \text{Moufang}$ ループ) は独立の原典を立てず、standard result; see Baez (2002) として扱う (位数 168 と $\text{PGL}(3,2) \cong \text{PSL}(2,7)$ は機械検証で確認済)。

チームサイズ・組織・集団構造の実証

- Alchian – Demsetz / Coase / Williamson. 企業サイズ = 測定・取引費用の連続最適化. [精読: $\triangle$ — 二次。個別書誌なし・書誌未取得]
- Altafini, C. (2012). opinion dynamics on signed networks. *PLOS ONE*. [精読: $\bigcirc$ — PMC OA・一次照合]
- Amazon two-pizza rule. $\approx 5-8$ 人 (folklore). [精読: ? — 業界二次資料・folklore。学術一次なし]
- Antal, Krapivsky & Redner (2006). 社会均衡動力学. *Physica D* 224, 130 – 136. [精読: ★ — 全文一次照合。「有限系は必ず balanced に収束」 = 価値づけ逆転の根拠]
- Arrow. 不可能性定理 (3 択以上で理想的集約なし). [精読: $\triangle$ — 二次。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)]
- Balkundi & Harrison (2006). “Ties, leaders, and time in teams.” *AMJ* 49(1), 49 – 68. [精読: $\triangle$ — 二次。内部密度メタ分析・リーダー中心性]
- Bezrukova et al. (2009). faultline 内 crisscrossing 概念. [精読: $\triangle$ — 二次。計算モデルで実証]
- Brooks, F. *The Mythical Man-Month* (パス数 $n(n-1)/2$). [精読: $\triangle$ — 二次。書誌の一部未取得 (年未記載)]
- Burt, R. structural holes / tertius. [精読: $\triangle$ — 二次 (F-1 表)。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)]
- Carton & Cummings (2012). “A theory of subgroups in work teams.” *AMR* 37(3), 441 – 470. [精読: $\triangle$ — abstract/二次]
- Carton & Cummings (2013). “Subgroup type and configuration on team performance.” *JAP* 98(5), 732 – 758 (PMID 23915429). [精読: $\triangle$ — abstract/二次]
- Chujoy et al. (2025). unbalanced sign $\rightarrow$ 振動・非収束. *Sci Rep* 15:39882. [精読: $\triangle$ — 本文]

403・abstract のみ引用]

- Condorcet 陪審定理. 正答率 >0.5 で人数増→精度↑・奇数は同数割れ回避. [精読: ○ — Wikipedia 本文精読 (一次寄り二次)。原典年なし・書誌の一部未取得]
- Cowan, N. (2001). “The magical number 4 in short-term memory.” *BBS* 24. [精読: △ — 二次。4±1 改訂]
- Deutsch, M. (1949 / 2006). 協調-競争理論. *Human Relations* 2(2) 脚注 3 / 2006 Handbook 章 pp.23–28. [精読: ★ — 一次照合。「協調なら偶奇無関係で収束」は Deutsch に無い外挿と注記]
- Dougherty & Edward (2009). “Odd or Even: Assembly Size and Majority Rule.” *J. of Politics* 71(2), 733–747. [精読: △ — abstract/二次 (403)]
- Eisert, Wilkens & Lewenstein (1999). 量子ゲーム理論 (EWL) . arXiv:quant-ph/9806088. [精読: ○ — Wikipedia 本文精読で逐語確認。実在確認済]
- Facchetti et al. (2011). signed networks. *PNAS* 108(52). [精読: ○ — PMC OA・一次照合。奇サイクル = frustration の実データ確認]
- Faust, K. (2007). “Very local structure in social networks.” *Sociological Methodology* 37. [精読: △ — 二次 (精読記録なし)]
- Faust, K. (2010). “A puzzle concerning triads in social networks.” *Social Networks* 32(3), 221–233. [精読: △ — abstract/二次。三つ組分布の 9 割が密度で説明される]
- Ghemawat, P. commitment 理論 (不可逆性 = 戦略性) . [精読: △ — 一次未読了・二次 (通説級)。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)]
- Goh, Krackhardt, Weingart & Koh (2014). “The role of Simmelian friendship ties on retaliation within triads.” *Small Group Research* 45(5). [精読: △ — abstract/二次]
- Graicunas, V.A. (1933). “Relationship in Organization” (span of control・ $R=N(2^{(N-1)}+N-1)$) . [精読: △ — 二次。RR-023 で 44/100/222 が canonical・Wikipedia の 60/105/160 は転記異本と注記]
- Granovetter, M. triadic closure. [精読: △ — 二次 (社会ネットワーク)。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)]
- Hackman & Vidmar (1970). “Effects of size and task type on group performance.” *Sociometry* 33, 37–54. [精読: △ — abstract/二次。主観的最適 4.6 人]
- Harada (2021). “Examining learning coherence in group decision-making: triads vs. tetrads.” *Scientific Reports* 11:20463. doi:10.1038/s41598-021-00089-w (PMC8516953) . [精読: △ — 著者名は一次確認で確定 (発見③)。本文は abstract/二次]
- He & Luo (2018). even number of directors. *J. of Banking & Finance* 93, 139–150. [精読: △ — 本文 403・abstract/二次]
- Heider, F. バランス理論 (三角形の符号の積で均衡判定) . [精読: △ — 二次。Cartwright – Harary と対で言及。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)]
- Katzenbach & Smith. チーム論. [精読: △ — 未精読・二次のみ。書誌未取得 (年・タイトル未記載)]
- Klimek, Hanel & Thurner (2009). “To how many politicians should government be left?” *Physica A*. arXiv:0804.2202. [精読: △ — 内閣サイズ・崖 ≈ 20 。abstract/二次]

- Krackhardt, D. (1999). “The Ties That Torture: Simmelian Tie Analysis in Organizations.”〔精読: △ — 二次 (Wikipedia 経由で構造確認)。書誌の一部未取得 (誌名・巻号・ページ未記載)〕
- Lau & Murnighan (1998). faultlines. *AMR* 23. 〔精読: △ — 二次資料レビュー〕
- Lichtenstein & Slovic. 選好逆転 (preference reversal) . 〔精読: △ — 二次 (F-1 表)。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)〕
- Lipset / Coser. cross-cutting vs reinforcing cleavages. 〔精読: △ — 二次。書誌未取得 (年・誌名未記載)〕
- Mac Carron, Kaski & Dunbar (2016). “Calling Dunbar’ s numbers.” *Social Networks* 47, 151 – 155. arXiv:1604.02400. 〔精読: △ — 著者名は一次確認で確定 (発見③)。層スケーリング比 ≈ 3 . abstract/二次〕
- Mäs et al. (2013). crisscrossing の計算モデル. *Org Sci* 24(3). 〔精読: △ — 二次 (403)〕
- May. 定理 (2 択=多数決が一意・単純多数決の特徴づけ) . 〔精読: △ — 二次。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)〕
- Miller, G.A. (1956). “The magical number seven, plus or minus two.” *Psychological Review* 63, 81 – 97. 〔精読: ○ — 論文末尾の「数秘警戒」を引用。7 $\pm$ 2 のチーム論転用を範疇誤用として棄却する側で使用〕
- Moscovici, S. 少数派影響 (minority influence) . 〔精読: △ — 二次・探索的。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)〕
- Mueller, J.S. (2012). “Why individuals in larger teams perform worse.” *OBHDP*. 〔精読: △ — abstract/二次。巻号未記載・書誌の一部未取得〕
- Pentland, A. (2012). “The new science of building great teams.” *HBR* 90(4), 60 – 69. 〔精読: ○ — ソシオメトリックバッジ実測。PDF 二次配布で本文確認〕
- Ringelmann / Latané. 社会的インパクト理論・べき乗則 $R(N)=N^{t-1}$. 〔精読: △ — 二次。Ringelmann 綱引き実験 (19c 末)。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)〕
- Scrum Guide (2017 / 2020). 開発チーム推奨サイズの推移 (3 – 9 人 $\rightarrow$ 10 or fewer) . 〔精読: ○ — RR-023 で 2020 原文一次確認〕
- Simmel, G. (1908). *Soziologie* (dyad/triad の質的転換・第三者の 3 役割 mediator/tertius gaudens/divide et impera) . 〔精読: △ — 原典未精読・二次 (Britannica 等)〕
- Steiner (1972). process loss (サイズ増 $\rightarrow$ 効率単調低下) . 〔精読: △ — 二次。原典未精読〕
- Sydow et al. (2009). 組織パス依存 (path dependence, non-ergodic) . *AMR*. 〔精読: △ — 書誌・要旨 (二次)。ロックイン・不可逆〕
- Tortoriello & Krackhardt (2010). “Activating cross-boundary knowledge: Simmelian ties.” *AMJ* 53(1), 167 – 181. 〔精読: △ — 276 名 R&D 技術者。abstract/二次〕
- Trueblood & Bussemeyer (2011). 判断の順序効果. 〔精読: △ — 二次 (F-1 表)〕
- Tyler, T. 手続的公正 (procedural justice・voice) . 〔精読: △ — 二次。 β の単純二分を崩す反証。書誌の一部未取得 (年・誌名未記載)〕
- von Neumann & Morgenstern (1944). 協力ゲーム・core (3 人目から提携が非自明化) . 〔精読: △ — 二次 (Britannica/AMS)。原典未精読〕
- Wheelan, S.A. (2009). “Group size, group development, and group productivity.” *Small*

Group Research 40(2), 247–262. [精読: △ — 329 実働グループ。abstract/二次]

- Zhang & Chen (2023). faultline メタ分析. *Management and Organization Review* 19(5). [精読: △ — 二次。撤回された Thatcher & Patel (2011) の生きた差し替え引用]
- [著者不明] (2026). arXiv:2601.07283 (Condorcet cycle $\leftrightarrow$ Möbius/Klein 壺) . [精読: ○ — 本文フェッチ・preprint・未査読。著者名未記載・要確認]

注 1: Thatcher & Patel (2011) は 2016 撤回済みにつき不掲載。faultline メタ分析は Zhang & Chen (2023) を参照。注 2: 灰色文献（書誌未確定につき独立エントリを立てない）：Gallup 「平均 12.1 人」チームサイズ調査（商用レポート・報告書名/年未特定）、Spotify squad 失敗事例分析（ブログ/記事系・出典未特定）、取締役会偶奇の Deng, Gao & Liu (2012) / Adil & Khan (2026)（誌名・巻号未取得・403）。本文で用いる場合は二次経由を明示（“as reported in RR-013” 等）し個別確認する。

関係・三者・発達の心理学（対応仮説の接地）

本節は、§5 の対応仮説（とくに「三者は二者の和に還元できない」という読み）と §2 の三者的力学の実証を接地する文献に限る。出発点となった意識の二軸（体験 A・§1）を展開する読み——感情の円環モデル、量子認知、実部/虚部の存在論、光や素粒子との対応など——は、本稿では未接地の今後の課題（§7）と位置づけており、その接地に用いた文献群（感情・量子認知・物理・思想史の約 65 件）は本稿の References には再掲せず、調査記録である PAPER-references-inventory.md に精読レベルつきで保存してある。

- Bakeman & Adamson (1984). 共同注意 = 「最も複雑な二者相互作用」(PMC8172475) . [精読: △ — 二次確認どまり]
- Benjamin, J. thirdness. [精読: △ — 二次。「物理的な三人目」ではない限定つき。書誌未取得（年・タイトル未記載）]
- Bion, W.R. (1961). work group / basic assumption group. [精読: △ — 二次レベル。書誌の一部未取得（誌名未記載）]
- Bowen (1978) / Kerr & Bowen (1988). 家族システム論・三角関係化 (triangulation) . [精読: △ — 一次本体は blocked。Comella (2001) の逐語（二次）経由]
- Britton, R. (2004 / 1989). triangular space / 第三の位置. *Psychoanalytic Quarterly* 73, 47–61 (PMID 14750465) . [精読: ★ — 一次全文 (1989) 逐語。「witness, not a participant」]
- Coe & Davies (2020). detouring が子の適応を独自予測. *J. Fam. Psychol.* 34(7), 814–824 (PMC8324313) . [精読: ★ — 一次全文照合]
- Comella (2001). Bowen 三角形の解説 (PDF 逐語) . [精読: ○ — PDF 逐語（一次に近い二次解説）。書誌の一部未取得（誌名未記載）]
- De Jaegher & Di Paolo (2007). “Participatory sense-making.” *Phenomenology and the Cognitive Sciences* 6, 485–507. doi:10.1007/s11097-007-9076-9. [精読: ★ — 一次精読（著者公開版 PDF 全文）。「at least two autonomous agents」「多人数拡張を予想」を逐語]
- De Jaegher & Di Paolo (2008). relational domain with its own properties（書章）. IOS Press, pp.33–47. [精読: ○ — 著者公開版で文脈確認]
- Di Paolo, Cuffari & De Jaegher (2018). *Linguistic Bodies*. MIT Press. [精読: △ — 書籍非]

OA・書誌/要約どまり]

- Favez, Frascarolo & Tissot (2017). “The Family Alliance Model: A Way to Study and Characterize Early Family Interactions.” *Frontiers in Psychology* 8:1441. doi:10.3389/fpsyg.2017.01441. [精読: ★ — 一次全文照合。「二者系は足し合わせられない」]
- Foulkes, S.H. (1948 / 1964). *Introduction to Group-Analytic Psychotherapy / Therapeutic Group Analysis* (group matrix) . [精読: △ — 一次は非 OA で未達。GASI 解説 + OA 論文 (PMC9893044) の二次多重]
- Gallotti & Frith (2013). we-mode (一人称複数) . [精読: △ — 書誌確認・二次。書誌の一部未取得 (誌名未記載)]
- Klein, M. スプリッティング・母子未分離. [精読: △ — 二次 (Melanie Klein Trust で用語確認)。書誌未取得 (年・タイトル未記載)]
- Lacan, J. 大文字の他者. [精読: △ — 二次 (精神分析の三者)。書誌未取得]
- Lavanchy (2002). 3 ヶ月児 97% の rapid gaze transition (学位論文) . [精読: △ — 孫引き (as cited in McHale et al. 2008)。原学位論文は未取得]
- Lewin, K. 場理論・life space (場=個人ごとに一つ) . [精読: △ — 二次。「場=実軸」という読みへの心理学伝統からの最強の反証 (§5)。書誌未取得]
- McHale, Fivaz-Depeursinge, Dickstein, Robertson & Daley (2008). LTP/family alliance. *Family Process* 47(4), 445 – 463 (PMC2761722) . [精読: ★ — PMC 全文をローカルに逐語照合。97%・“unexplained by dyadic” を照合済]
- Minuchin, S. detouring / coalition (第三者を排除する連合) . [精読: △ — 二次。病理的機能不全の側。書誌未取得 (年・タイトル未記載)]
- Ogden, T.H. (2004). analytic third. *Psychoanalytic Quarterly* 73, 167 –. [精読: ★ — 一次全文・行番号特定 (81-86, 719-724)]
- Parke & O’ Leary (1976). “second-order effect” (第三者の presence の効果) . [精読: △ — 二次。「順番 (sequence)」ではない混同の罠として注記]
- Sawyer & DeZutter (2009). collaborative emergence (13 人即興劇団) . *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts* 3(2), 81 – 92. doi:10.1037/a0013282. [精読: ★ — 一次全文 (著者公開版)]
- Tomasello, M. 共同注意・共有志向性 (自己・他者・対象の三項) . [精読: △ — 二次。三項構造の支持だが二次確認どまり。書誌未取得 (年・タイトル未記載)]
- Trevarthen (2001). 一次/二次間主観性 (person-person-object の三項, 9 ヶ月～) . [精読: △ — 原論文が書籍章で未取得・二次 (PMC9116197 経由)]
- Winnicott, D.W. 可能性空間・抱える環境 (第三の領域) . [精読: △ — 体系内確立・二次資料。原理的に二者の場 (3 人拡張は本文上の空白)。書誌未取得 (年・タイトル未記載)]

物理・方法 (本文が直接引く分のみ)

- Litt, G. (2026). “Understanding is the new bottleneck for AI-assisted coding” (geofrey.litt.com, 2026-07-02) . [精読: ○ — 本文フェッチ。§3 の方法論の外部参照]
- Zurek, W.H. (2009). Quantum Darwinism. [精読: ○ — 二次だが最有力。光子系・NV セ

ンター・超伝導回路で実験検証。§5 の「共有＝不変量」の物理側の傍証。書誌の一部未取得（誌名・巻号未記載）]

付録 A: 機械検証スクリプト一覧

本稿の数学的主張のうち、計算で確かめられるものは以下の 20 本のスクリプトで数値的に検証されている（いずれも純 Python・外部ライブラリ非依存で再実行可能）。格納先は公開リポジトリの `knowledge/research/two-axis-closure/` である。

スクリプト	検証内容
RR-001a	四元数のヤコビ律・結合性（分類定理の基礎的性質）
RR-010a	八元数の交代法則（associator の交代性・破れは部分代数の外の第三から）
RR-011a	四元数の回転子（rotor）とパウリ行列・二重被覆の分解
RR-012a	ノルム乗法性 $ xy = x y $ と、増幅が住む加法側の交差項の分離
RR-013a	可除代数の可逆性と、ユニタリ／量子的な可逆性の区別
RR-013b	十六元数（sedenion）の零因子 $(e_1 + e_{10})(e_4 - e_{15})=0$ （ある基底規約で総当たり確認・8 次元より上で割り算が死ぬ）
RR-015a	中心（実軸）の場としての不変性
RR-015b	八元数の自己同型 (G_2 の元) の構成と検証
RR-015c	G_2 の置換的自己同型
RR-016a	実部／虚部のゲージと不変量
RR-016b	密度行列とデコヒーレンス（共有＝不変量の物理側）
RR-016c	四元数ノルムとミンコフスキー計量の対比
RR-016d	Baez – Huerta のエルミート行列とミンコフスキー時空の対応
RR-018a	「割れる」の層構造（性質・ノルム・過程・場所）
RR-018b	単位球の舞台 (S^0, S^1, S^3, S^7 = 平行化可能球面)
RR-018c	実軸の棚卸し
RR-018d	「進み」成分の検証
RR-024a	三者 = 6 次元（平面 3 枚を直交）の回転構造 $SO(6)$ の骨格

スクリプト	検証内容
RR-024b	2～8 名の回転構造 $SO(2n)$ の骨格
RR-024c	偶奇の膠着＝幾何学的フラストレーション／グラフ二部性

これらはいずれも実行時に検算が通ること (ALL CHECKS PASSED) を確認済みである。ファノ平面の自己同型群の位数 168、非結合等式 $(e_1 \ e_2) e_4 = +e_7 \neq e_1 (e_2 \ e_4) = -e_7$ など、総当たり計算で確認されている。

付録 B: 用語と確度タグの対訳

本稿は、主張の確からしさと、読みの採否とを、二つの語彙で区別する。

主張の水準（その主張がどれだけ確かか）：

- **established** (確立)：証明または機械検証で確かめられた事実。本稿では数学の分類定理・ファノ平面の性質などがこれにあたる。
- **interpretive** (解釈)：構造の類似に基づく読み。数学の構造を現実の側に対応づける仮定を含み、証明されてはいないが、実証と整合し設計上の含意を持つもの。
- **speculative** (思弁)：探索段階の見立て。まだ検証されておらず、外れうる、あるいは保持論点として決着を急がないもの。

読みの状態（その読みを採るかどうかの判定・判定台帳 RR-010 の語彙）：

- **採用**：判定済みで、本稿の骨格になっているもの。
- **方向確定**：方向は定まったが、言葉の精度をなお調整中のもの。
- **読み候補**：提示されたが、まだ採否の判定を待っているもの。
- **探索中**：調査そのものが進行中のもの。
- **見送り**：判定済みで、採らないと決めたもの（理由も残す）。

判定は、候補の提示を言語モデル (Fable 5) が、採否を提案者 (pjdhiro) が体験と照らして行う分業による。なお本プログラムの内部調査記録では、確からしさをより簡略な確度ラベルで注記しているが、公開する本稿では上記の三語 (established / interpretive / speculative) に統一している。